UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍvAR
Departamento de Computación y
Tecnología de la Información
Estructuras Discretas III

Práctica semana 3
Sartenejas, 01 de Febrero de 2011

1. Se tienen m tarjetas blancas, n tarjetas azules y p sobres. Se quiere saber de cuántas maneras se pueden colocar las tarjetas en los sobres si:

   a) Las tarjetas del mismo color son indistinguibles, los sobres son distinguibles y cada sobre debe tener a lo sumo una tarjeta blanca. **Solución:**

      1) Colocar las tarjetas blancas $\binom{p}{m}$.
      2) Colocar las tarjetas azules $d_p(n)$.
         Por el principio fundamental $\binom{p}{m}d_p(n)$

   ■

2. Se desean colocar k bolas en n cajas. De cuántas formas diferentes se puede hacer si:

   a) Las bolas están etiquetadas y las cajas son indistinguibles.
   Solución: Las bolas definen un conjunto y las cajas las posibles particiones de ese conjunto.
   $S_1(k) + S_2(k) + \ldots + S_n(k)$ ■

   b) Las bolas son distinguibles y las cajas son indistinguibles pero no se permiten cajas vacías.
   Solución: Se distribuyen las bolas en n partes asegurando que no hay cajas vacías. $S_n(k)$
   ■

   c) Las bolas están etiquetadas y las cajas son indistinguibles y cada caja debe tener máximo una bola.
   Solución: Se debe colocar una o cero bolas en cada caja, si $k \leq n$ como las cajas son indistinguibles hay una sola manera de hacerlo.
   ■

   d) Las bolas son indistinguibles y las cajas distinguibles.
   Solución: $d_n(k)$ ■

   e) Las bolas son indistinguibles y las cajas distinguibles y cada caja debe tener máximo una bola.
   Solución: $\binom{n}{k}$ ■

   f) Las bolas son indistinguibles y las cajas distinguibles y cada caja debe tener al menos una bola.
   Solución: $C_n(k)$ ■

g) Las bolas y las cajas son distinguibles.
Solución: n^k ■

h) Las bolas y las cajas son distinguibles pero se coloca máximo una bola por caja.
Solución: $n^{\underline{k}}$ ■

i) Las bolas y las cajas son distinguibles pero al menos hay una bola en cada caja.
Solución: Si las cajas son indistinguibles y no hay cajas vacías $S_n(k)$. Para hacer las cajas distinguibles $n!S_n(k)$ ■

3. Use el método de perturbación para evaluar:

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$
Solución: $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)}$
$\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)(j+2)} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
Usamos fracciones simples para obtener $\frac{1}{(j+1)(j+2)} = \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2}$
$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
$S_n = 1 - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1}$ ■

b) $\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

c) $\sum_{i=1}^{n} i2^i$